

12/10/2015

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

|| Δεδομένα αυτά ορίζονται οι συνήθεις πράξεις πρόσθεσης "+" και πολλαπλασιασμού "·".

Για πρόσθεση:

1. $\forall a, b \in \mathbb{N} : a+b = b+a$ μεταθετικότητα (πιο αυτί από αντιμεταθετικότητα)
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : a+(b+c) = (a+b)+c$ προσεταιριστική ιδιότητα
3. $\forall a \in \mathbb{N}_0 : a+0 = a = 0+a$ αδέτερο στοιχείο
4. $\forall a \in \mathbb{Z} : \exists -a \in \mathbb{Z} : a+(-a) = 0 = (-a)+a$ υπάρχει αντίθετο στοιχείο

Για πολλαπλασιασμό:

5. $\forall a, b \in \mathbb{N} : a \cdot b = b \cdot a$ μεταθετικότητα
6. $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : a(b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ προσεταιριστικότητα
7. $\forall a \in \mathbb{N} : a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ αδέτερο στοιχείο
8. $\forall a \in \mathbb{Q} \text{ κ' } a \neq 0 : \exists a^{-1} = \frac{1}{a} : a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$

9. $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : a(b+c) = ab+ac$ επιμεριστική ιδιότητα.
 $(a+b)c = ac+bc$

Αφαίρεση

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a-b := a+(-b)$$

$$10. \forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a \cdot b = 0 \Rightarrow a=0 \text{ ή } b=0$$

$$11. \forall a, b \in \mathbb{Z} : a < b := b-a \in \mathbb{N}$$

$$\text{Παρατήρηση: } a \leq b \Leftrightarrow b-a \in \mathbb{N}_0$$

$$12. a < b \Rightarrow a+c < b+c, \forall c \in \mathbb{Z}$$

$$13. a < b \Rightarrow ac < bc, \forall c \in \mathbb{N}$$

ΑΡΧΗ ΚΑΛΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

Αν $S \subseteq \mathbb{N}$ και $S \neq \emptyset$ τότε το S έχει ελάχιστο στοιχείο, δηλαδή:
 $\exists j \in S : j \leq x, \forall x \in S$, και τότε γράφουμε $j = \min S$

ΑΡΧΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΡΟΦΗΣ

Έστω $S \subseteq \mathbb{N}$ έτσι ώστε: ① $1 \in S$
② $\forall n \in \mathbb{N} : n \in S \Rightarrow n+1 \in S$
Τότε $S = \mathbb{N}$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αρχή Καλής Διατάξης $\Leftrightarrow$ Αρχή Μαθηματικής Επιστροφής
(AKΔ) (AME)

Απόδειξη:

(AKΔ) $\Rightarrow$ (AME) Υποθέτουμε ότι ισχύει η (AKΔ).

Έστω $S \subseteq \mathbb{N}$ έτσι ώστε:

① $1 \in S$ και ② $\forall n \in \mathbb{N} : n \in S \Rightarrow n+1 \in S$

Θάλο $S = \mathbb{N}$

Υποθέτουμε ότι $S \neq \mathbb{N}$

Τότε $\mathbb{N} - S = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S\} \neq \emptyset$

Από την (AKΔ) $\Rightarrow$ υπάρχει $j = \min(\mathbb{N} - S)$

• Αν $j = 1$, τότε $1 \in \mathbb{N} - S$, δηλαδή $1 \notin S$: άτοπο από την υπόθεση

• Άρα $j \geq 2$, και τότε $1 \leq j-1 < j$

Αν $j-1 \in \mathbb{N} - S$, τότε το $j-1$ θα ήταν γνήσια μικρότερο από το $j = \min(\mathbb{N} - S)$ και αυτό είναι άτοπο.

Άρα $j-1 \notin \mathbb{N} - S$ και ...

Αρα $j-1 \in S$ $\xRightarrow{\text{ΥΠΟΘΕΣΗ}}$ $j-1+1=j \in S$: αυτό είναι άτοπο, διότι $j \in \mathbb{N}-S$,
 $1 \in S$

δηλαδή $S \neq \emptyset$ έτσι θα έχουμε $S' = \mathbb{N}$.

(AMG) $\Rightarrow$ (AKA) Υποθέτουμε ότι ισχύει η (AMG).

Έστω $S \subseteq \mathbb{N}$, $S \neq \emptyset$

Θέσο το S έχει ελάχιστο στοιχείο.

Υποθέτουμε ότι το S δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

Ορίζουμε το σύνολο $T := \{n \in \mathbb{N} \mid \forall k: 1 \leq k \leq n: k \notin S\} =$
 $= \{n \in \mathbb{N} \mid 1, 2, 3, \dots, n \notin S\}$

$1 \in T$, διότι αν $1 \notin T$, τότε θα είχαμε ότι $1 \in S$
 και άρα θα ήταν πρόταση.

Το ελάχιστο στοιχείο του S , το οποίο είναι
 άτοπο

Αρα $1 \in T$

Έστω ότι $n \in T$. Τότε $1, 2, \dots, n \in T$ δηλ. $\notin S$

Αν $n+1 \in S$, τότε επειδή $1, 2, \dots, n \notin S$, το
 $n+1$ θα ήταν το ελάχιστο στοιχείο του S , αυτό
 είναι άτοπο, διότι το S υποθέτουμε ότι δεν έχει
 ελάχιστο στοιχείο. Αρα $n+1 \notin S \Rightarrow n+1 \in T$

Τότε (AMG) για το $T \Rightarrow T = \mathbb{N}$

$\Rightarrow S = \emptyset$: άτοπο, διότι $S \neq \emptyset$

Αρα το S έχει ελάχιστο στοιχείο $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ ισχύει η (AKA)

ΑΡΧΗ ΜΕΓΙΣΤΟΥ:

□

Κάθε μη-κενό σύνολο $S \subseteq \mathbb{N}$, το οποίο είναι άνω
 γρανιέλο, (δηλαδή: $\exists m \in \mathbb{N} : x \leq m, \forall x \in S$) έχει μέγιστο
 στοιχείο, δηλαδή $\exists j \in S : x \leq j, \forall x \in S$

ΘΕΩΡΗΜΑ: $(AK\Delta) \Leftrightarrow (AM\epsilon) \Leftrightarrow (AM)$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $P(n)$: πρόταση η οποία εξαρτάται από το $n \in \mathbb{N}$
Υποθέτουμε ότι η $P(1)$: αληθής και αν η $P(n)$ αληθής
τότε και η $P(n+1)$: αληθής. Τότε:
 $n \in P(n)$: αληθής $\forall n \in \mathbb{N}$

Απόδειξη Έστω $S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) : \text{αληθής}\}$
Τότε ① $1 \in S$ (διότι η $P(1)$: αληθής)
② $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$ (διότι $P(n)$: αληθής $\Rightarrow$
 $P(n+1)$: αληθής)
Αρα η $(AM\epsilon) \Rightarrow S = \mathbb{N}$ Αρα $P(n)$: αληθής $\forall n \in \mathbb{N}$

Παράδειγμα ① $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$: $P(n)$

$$P(1): 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} \text{ αληθής}$$

Υποθέτουμε ότι η $P(n)$ αληθής

$$\begin{aligned} P(n): 1+2+\dots+n &= \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 1+2+3+\dots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} : P(n+1) \end{aligned}$$

② $1+3+5+7+\dots+(2n-1) =$

Υποθέτουμε ότι
το άθροισμα που έχουμε ~~πάραι~~ ~~πάραι~~ ~~πάραι~~
 $1 \in n^2$: $P(n)$
 $P(1)$ είναι αληθής, διότι $1 = 1^2$, Έστω ότι η $P(n)$: αληθής

$$\begin{aligned} &1 \\ &1+3=4 \\ &1+3+5=9 \\ &1+3+5+7=16 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$P(n): 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2(n+1) - 1$$

$$= n^2 + 2n + 2 - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2:$$

$P(n+1):$ αληθής.

Από την Πρόταση $\Rightarrow P(n): \alpha \text{ Αληθής}, \forall n \in \mathbb{N}.$